

Über die Wirksamkeit von Abschaltstäben thermischer Reaktoren im Hinblick auf deren Durchmesser, Anzahl und Anordnung

Von W. HÄFELE

Aus der Planungsabteilung der Reaktorstation Karlsruhe *
(Z. Naturforsch. 12 a, 368—377 [1957]; eingegangen am 30. Januar 1957)

Es wird mit Hilfe der Eingruppentheorie das Randwertproblem der Diffusionsgleichung gelöst, welches für einen zylindrischen Reaktor mit runden Abschaltstäben charakteristisch ist. Dabei wird der Fall durchgerechnet, daß ein Abschaltkranz mit 4, 6, 8, 12 Stäben verschiedener Radien besetzt ist und es wird der Fall behandelt, daß zwei Kränze mit je 4 Abschaltstäben vorliegen. Die Ermittlung des entstehenden Reaktivitätsverlustes wird an die genauere Behandlung durch die Zweigruppentheorie angeschlossen. Die umfangreiche numerische Auswertung der an sich leicht zu ermittelnden transzendenten Gleichungen ist der eigentliche Sinn dieser Arbeit. Sie gelang, da es möglich war, die Göttinger elektronische Rechenmaschine G 1 zu benutzen.

Bei dem Entwurf eines thermischen Reaktors entsteht die Aufgabe, Abschalt- und Regelstäbe so zu dimensionieren, daß ein sicheres Arbeiten gewährleistet werden kann. Dabei entsteht die Frage, welche Anzahl von Stäben vorzusehen ist und was für einen Durchmesser sie haben sollen. Auch erhebt sich die Frage, in welcher Anordnung die Stäbe am besten anzubringen sind.

Wir behandeln diese Aufgabe als Randwertproblem der Diffusionsgleichung mit Hilfe der Eingruppentheorie und schließen den daraus zu ermittelnden Reaktivitätsverlust an die genauere Zweigruppentheorie an.

Alle Abschaltstäbe sollen den zylindrischen Reaktor ganz durchsetzen, sollen also ganz eingefahren sein.

A. Allgemeine Gleichungen und Lösungsansatz

Wir behandeln im folgenden nur Reaktortypen, deren Reflektorersparnis δ im Verhältnis zum Gesamtradius R_w so klein ist, daß man die Flußverhältnisse in genügend guter Näherung wiedergibt, wenn man einen Reaktor ohne Reflektor mit dem Radius $R = R_w + \delta$ betrachtet. Da wir mit der Eingruppentheorie arbeiten wollen, haben wir es allein mit der Differentialgleichung

$$\Delta\Phi + \beta^2 \Phi = 0 \quad (1)$$

zu tun. (Φ ist der Neutronenfluß.) Wir gehen in die Gl. (1) mit dem üblichen Separationsansatz ein:

$$\Phi = \Phi_r(r, \varphi) \cdot \Phi_z(z). \quad (2)$$

* Kernreaktor Bau- und Betriebs-Gesellschaft m. b. H. Ein Hauptteil der Arbeiten wurde in der ehemaligen Reaktorgruppe der Physikalischen Studiengesellschaft Düsseldorf m. b. H. im Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen, ausgeführt.

Aus (1) folgt somit

$$\Delta_r \Phi_r + \beta_r^2 \Phi_r = 0, \quad (3)$$

$$\Delta_r \equiv \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, \quad (3a)$$

$$\beta^2 = \beta_r^2 + \beta_z^2, \quad (3b)$$

$$\Delta_z \Phi_z + \beta_z^2 \Phi_z = 0, \quad (4)$$

$$\Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4a)$$

Im folgenden wollen wir für Φ_r wieder Φ schreiben, denn da die Abschaltstäbe ganz eingefahren werden sollen, haben wir es nur mit der Funktion Φ_r zu tun.

Gl. (3) hat die allgemeine Lösung

$$\Phi(r, \varphi) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [A_m J_m(\beta_r r) + B_m N_m(\beta_r r)] e^{im\varphi}. \quad (5)$$

r und φ sind die zu einem geeignet gewählten Zentrum gehörigen Polarkoordinaten, J_m ist die BESSEL-sche Funktion m -ter Ordnung, N_m ist die NEUMANN-sche Funktion m -ter Ordnung.

J_m ist im Nullpunkt regulär und hat dort für ganzzahliges m die Entwicklung

$$J_m(x) = \frac{1}{m!} \left(\frac{x}{2} \right)^m + \dots, \quad (6)$$

$m \geq 0$; für $m < 0$ beachte (8).

N_m ist im Nullpunkt nicht regulär. Für ganzzahliges m gilt:

$$N_m(x) = - \frac{(m-1)!}{\pi} \left(\frac{x}{2} \right)^{-m} + \dots, \quad (7)$$

$$N_0(x) = \frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma x}{2} + \dots,$$

$m > 0$; für $m < 0$ beachte (8).

Dabei ist γ die EULERSche Konstante.



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

Für ganzzahliges m gilt für jede Zylinderfunktion

$$Z_{-n}(x) = (-1)^n Z_n(x). \quad (8)$$

Weiter gelten die sogenannten Additionstheoreme¹:

$$\text{Für } Z < R \quad e^{i_r \psi} Z_r(\tilde{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} Z_{r+m}(R) J_m(z) e^{im\varphi}. \quad (9)$$

$$\text{Für } Z > R \quad e^{i_r \psi} Z_r(\tilde{\omega}) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_{r+m}(R) Z_m(z) e^{im\varphi}. \quad (10)$$

Die Bedeutung der Größen ψ , φ , $\tilde{\omega}$, R und z möge man aus den Abb. 1 und 2 entnehmen.

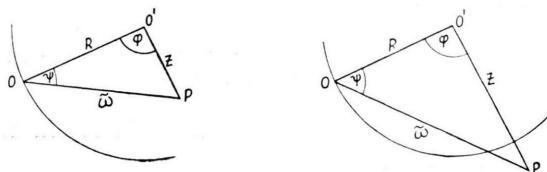


Abb. 1 und 2. Lage der beiden Zentren O und O' für die Polarkoordinaten $(\tilde{\omega}, \psi)$ und (Z, φ) .

Wir behandeln jetzt den Fall eines exzentrischen Stabes, wie er ähnlich auch schon von GLASSTONE und EDLUND² vorliegt, weil in der hier vorliegenden Behandlungsweise sofort der Weg zur Verallgemeinerung abgelesen werden kann.

Vorgegeben sei das zweifach zusammenhängende Gebiet \mathfrak{A} (s. Abb. 3).

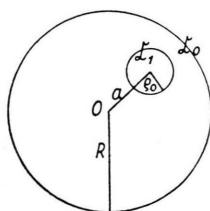


Abb. 3. Das zweifach zusammenhängende Gebiet \mathfrak{A} mit dem Rande \mathfrak{C}_0 und \mathfrak{C}_1 .

In ihm soll die Differentialgleichung (3) gelöst werden, wobei Φ auf dem gesamten Rand \mathfrak{C}_0 und \mathfrak{C}_1 verschwinden soll. Der Mittelpunkt des Reaktors heiße O , der Mittelpunkt des Abschaltstabes O' . R sei der effektive Radius des Reaktors, ϱ der wirkliche Radius des Abschalt- bzw. Regelstabes, ϱ_0 der effektive Radius. Der Abstand des Mittelpunktes des Abschaltstabes vom Mittelpunkt des Reaktors sei a . Die von dem Mittelpunkt O' ausgehenden Polarkoordinaten bezeichnen wir mit r_1 , φ_1 .

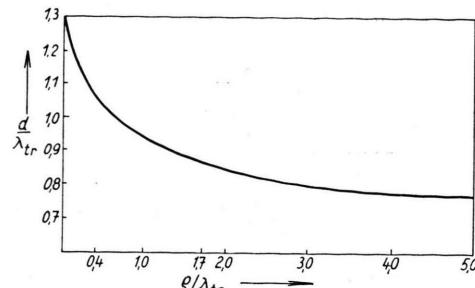


Abb. 4. Die Extrapolationslänge d als Funktion des Zylindrusradius in maßstabfreien Einheiten.

Wir machen an dieser Stelle ein für alle Mal die Voraussetzungen

$$\frac{\beta_r \varrho}{2} \ll 1 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\beta_r \varrho_0}{2} \ll 1. \quad (9)$$

Ihr Sinn wird in den folgenden Ausführungen klar werden. Um die Bedingung

$$\Phi = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{C}_1 \quad (10)$$

einfach erfüllen zu können, setzen wir an:

$$\Phi(r_1, \varphi_1) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{A_m J_m(\beta_r r_1) + B_m N_m(\beta_r r_1)\} e^{im\varphi_1}. \quad (11)$$

Dann ergibt sich aus der Randbedingung (10):

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{A_m J_m(\beta_r \varrho_0) + B_m N_m(\beta_r \varrho_0)\} e^{im\varphi_1} = 0. \quad (12)$$

Dies führt auf die Bedingung

$$B_m = -A_m \frac{J_m(\beta_r \varrho_0)}{N_m(\beta_r \varrho_0)}. \quad (13)$$

Mit (9) folgt aus (6) und (7) für $m \neq 0$

$$\begin{aligned} B_m &= A_m \frac{\pi}{m! (m-1)!} \left(\frac{\beta_r \varrho_0}{2} \right)^{2m} \quad (m \neq 0), \\ \text{d. h.} \quad B_m &\sim A_m \left(\frac{\beta_r \varrho_0}{2} \right)^{2m} \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Unter Zuhilfenahme dieses Formalismus werden die Randbedingungen (10) nicht befriedigen. Wir haben Gl. (14) nur abgeleitet, um eine allgemeine Relation zwischen den Größen B_m und A_m zu besitzen, die wegen (9) weiter unten sofort eine bestimmte Vernachlässigung nahelegt.

$$\text{Die Bedingung} \quad \Phi = 0 \quad \text{auf} \quad \mathfrak{C}_0 \quad (15)$$

¹ G. N. WATSON, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, S. 358 ff. Cambridge, at the University Press.

² GLASSTONE u. EDLUND, The Elements of Nuclear Reactor Theory, D. van Nostrand Company, Inc.

untersuchen wir, indem wir die Additions-Theoreme anwenden. Wir erhalten

$$\Phi(r_0, \varphi_0) = \sum_{p, m=-\infty}^{+\infty} \{A_m J_{m+p}(\beta_r a) J_p(\beta_r r_0) + B_m J_{m+p}(\beta_r a) N_p(\beta_r r_0)\} e^{ip\varphi_0}.$$

(15) bedingt die Gleichungen:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{A_m J_p(\beta_r R) + B_m N_p(\beta_r R)\} J_{m+p}(\beta_r a) = 0 \quad \text{für alle } p. \quad (16)$$

Mit (13) und (16) sind die beiden Sätze von unendlich vielen Konstanten A_m und B_m völlig bestimmt. Dadurch ist das Problem im Prinzip streng gelöst. Wir berücksichtigen nun (9), lesen Gl. (13) in der Näherung (14) und setzen wegen (14)

$$\begin{aligned} B_0 &= 1 \quad (m=0), \\ B_m &= 0 \quad (m \neq 0). \end{aligned} \quad (17)$$

$B_0 = 1$ ist im Sinne einer Normierung zu verstehen (das ganze Problem ist linear und hat einen Faktor frei). (16) legt jetzt folgende Transformation nahe:

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m J_{m+p}(\beta_r a) = \bar{A}_p. \quad (18)$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \bar{A}_p J_p(\beta_r R) + N_p(\beta_r R) J_p(\beta_r a) &= 0 \quad \text{für alle } p, \\ \text{d. h.} \quad \bar{A}_p &= -\frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p(\beta_r a). \end{aligned} \quad (19)$$

Nun schreiben wir den allgemeinen Ausdruck für $\Phi(r, \varphi)$ noch einmal an. Dabei beschreiben wir die Terme, die mit A_m behaftet sind, von O aus, dagegen einen Singularitätenterm weiterhin von O' aus und erhalten

$$\Phi = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \bar{A}_p J_p(\beta_r r_0) e^{ip\varphi_0} + N_0(\beta_r r_1). \quad (20)$$

In dieser gemischten Form ergibt die Bedingung (10) jetzt die kritische Gleichung für den Eigenwert β_r . Wir geben sie unter Verwendung von (19) an, indem wir im Summenterm einfach $r_0 = a$ und $\varphi_0 = 0$ setzen, was wegen (14) erlaubt ist:

$$-N_0(\beta_r \varrho_0) + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p^2(\beta_r a) = 0. \quad (21)$$

Hätten wir, anstatt $\Phi = 0$ für den effektiven Radius ϱ_0 des Stabes zu verlangen, die genauere Bedingung

$$\partial \Phi / \partial r = \Phi / d \quad (22)$$

³ Reaktorhandbuch, Bd. II, S. 395; Declassified Edition, May 1955. Published by Technical Information Service U.S. Atomic Energy Commission.

auf dem wirklichen Radius verlangt, so hätten wir an Stelle von (21) erhalten:

$$\begin{aligned} -N_0(\beta_r \varrho) - \beta_r d N_1(\beta_r \varrho) \\ + \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \frac{N_p(\beta_r R)}{J_p(\beta_r R)} J_p^2(\beta_r a) = 0. \end{aligned} \quad (23)$$

d ist die Extrapolationslänge. Wir entnehmen sie aus dem Reaktorhandbuch ³ als Kurve

$$\begin{aligned} d/\lambda_{tr} &= f(\varrho/\lambda_{tr}) \\ (\lambda_{tr} &= \text{Transportweglänge}). \end{aligned}$$

Aus (23) folgt ⁴ mit (6) und (7), daß der effektive Radius des Stabes sich aus dem wirklichen wie folgt bestimmt:

$$N_0(\beta_r \varrho_0) = N_0(\beta_r \varrho) + \beta_r d N_1(\beta_r \varrho),$$

d. h. mit (9), (6) und (7)

$$\varrho_0 = \varrho e^{-d/\varrho}; \quad (24)$$

für große ϱ ergibt sich die bekannte Formel

$$\varrho_0 = \varrho - d. \quad (25)$$

Der Ausdruck (23) findet sich bereits bei GLASSTONE und EDLUND ⁵, wobei dort die Größe d infolge eines Druckfehlers da auftritt, wo $1/d$ stehen müßte.

(23) wurde hier noch einmal auf etwas andere Art und Weise ermittelt, weil von der hier vorliegenden Betrachtungsweise aus unmittelbar der Zugang zu den Problemen mehrerer Abschaltstäbe möglich ist. Zu dem Ende untersuchen wir jetzt die erhaltenen Relationen auch einmal auf ihren physikalischen Gehalt hin. Gl. (1) können wir auch als Gleichung zur Bestimmung von skalaren Eigenschwingungen Φ auffassen. Die Terme A_m und B_m sind dann die Amplituden der Oberwellen, die angeregt werden können, wenn der Schwingungsausschlag der ent-

⁴ In Übereinstimmung mit dem Reaktorhandbuch Bd. II, S. 606.

⁵ S. Anm. ², S. 329, Gl. (11, 42, 2).

stehenden Gesamtschwingung sich merklich über dem Durchmesser des Stabes ändert. Im Gegensatz zu Beugungsvorgängen mit von außen anregender Grundschwingung verschwinden hier aber trotz der Bedingung (9) nicht die Größen A_m ($m \neq 0$).

Um die Randbedingung (15) erfüllbar zu machen, bleiben gewisse Oberwellenamplituden A_m übrig. Sie finden sich im Summenterm der Gln. (21) bzw. (23) wieder. Je größer die Oberwellenanregung ist, desto kleiner ist der für die Anregung der Grundwelle verbleibende Anteil, um so schlechter ist die Wirkung des Abschaltstabes. Bei einem exzentrischen Stab wird der Summenterm für $a = 0$ zu Null, also dann, wenn der Stab konzentrisch sitzt, ist seine Wirkung am größten. Diese Erkenntnis ist für den Fall eines Stabes trivial, wird aber beim Übergang zu mehreren Stäben uns helfen, die Verhältnisse besser zu durchschauen.

Den eigentlichen Lösungsweg haben wir gewonnen, indem wir durch die Ungleichung

$$\frac{\beta_r \varrho}{2} \ll 1$$

auf die Beziehungen

$$B_0 = 1 \quad (m=0), \quad B_m = 0 \quad (m \neq 0)$$

geführt werden und nur die mit A_m behafteten (regulären) Terme vom Reaktorzentrum aus beschreiben, dagegen den *neuen* (nicht regulären) Term B_0 vom Zentrum dem ihn bedingenden Abschaltstabes aus beschreiben.

B. Die Formeln für n Stäbe und 2×4 Stäbe

Wir betrachten nun nicht einen Stab, sondern n symmetrisch im Abstand a vom Zentrum angebrachte

Stäbe (für $n=4$ siehe Abb. 5). Im Zentrum eines jeden Stabes setzen wir an

$$\Phi_i(r_i, \varphi_i) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \{A_m J_m(\beta_r r_i) + B_m N_m(\beta_r r_i)\} e^{im\varphi_i},$$

$$i = 1 \dots n; \quad \Phi_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \Phi_i.$$

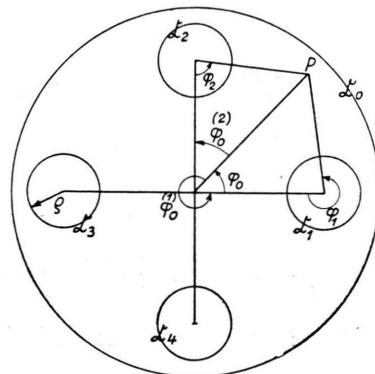


Abb. 5. Vier symmetrisch angeordnete Stäbe im Abstand a vom Zentrum.

Aus Symmetriegründen sind die A_m , B_m für jeden Stab gleich, sie müssen also nicht indiziert werden. Wir folgen der Überlegung des vorigen Abschnittes, indem wir alle Terme A_m vom Zentrum aus beschreiben und die Terme B_0 unverändert von den Mittelpunkten der n Stäbe aus beschreiben.

So ergibt sich auf genau die gleiche Art und Weise wie im vorigen Abschnitt der folgende Ausdruck:

$$-N_0(\beta_r \varrho) - \beta_r d N_1(\beta_r \varrho) + n \sum_{q=-\infty}^{+\infty} \frac{N_{nq}(\beta_r R)}{J_{nq}(\beta_r R)} J_{nq}^2(\beta_r a) - S' N_0(\beta_r r_{i,j}) = 0. \quad (26)$$

Die $r_{i,j}$ sind die Abstände vom Mittelpunkt eines Stabes zu je einem anderen Stab j und das Summenzeichen S' bedeutet Summation über alle Stäbe unter Auslassung der r_{ii} . Es ist auf die zusätzlichen Bedingungen

$$\varrho/r_{i,j} \ll 1 \quad (27)$$

für alle j zu achten (siehe auch Anm. ⁶⁾).

Haben wir es mit zwei Kränzen von 4 Abschaltstäben zu tun, deren erster den Abstand a vom Mittelpunkt hat, deren zweiter dagegen den Abstand l , so erhält man die kritische Gleichung auf genau dieselbe Art und Weise (Abb. 6).

⁶ W. HÄFELE, Diplomarbeit 1950, Techn. Hochschule München (unveröffentlicht).

Für 2×4 Stäbe gilt also

$$\begin{aligned} & \left[N_0(\beta_r \varrho) + \beta_r d N_1(\beta_r \varrho) - 4 \sum_n \frac{N_{4n}(\beta_r R)}{J_{4n}(\beta_r R)} J_{4n}^2(\beta_r a) + S \sum_{j'} N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] \\ & \cdot \left[N_0(\beta_r \varrho) + \beta_r d N_1(\beta_r \varrho) - 4 \sum_n \frac{N_{4n}(\beta_r R)}{J_{4n}(\beta_r R)} J_{4n}^2(\beta_r l) e^{in(\pi/4)} + S \sum_{i'} N_0(\beta_r r_{i,j}) \right] \\ & - \left[S \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) - 4 \sum_n \frac{N_{4n}(\beta_r R)}{J_{4n}(\beta_r R)} J_{4n}(\beta_r l) J_{4n}(\beta_r a) \right] \\ & \cdot \left[S \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) - 4 \sum_n \frac{N_{4n}(\beta_r R)}{J_{4n}(\beta_r R)} J_{4n}(\beta_r l) J_{4n}(\beta_r a) e^{in(\pi/4)} \right] = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} & S \sum_{j'} N_0(\beta_r r_{i,j}) = N_0(\beta_r 2a) + 2N_0(\beta_r a\sqrt{2}), \\ & S \sum_{i'} N_0(\beta_r r_{i,j}) = N_0(\beta_r 2l) + 2N_0(\beta_r l\sqrt{2}), \\ & S \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}) = 2N_0(\beta_r \sqrt{l^2 + a^2 - al\sqrt{2}}) + 2N_0(\beta_r \sqrt{l^2 + a^2 + al\sqrt{2}}), \\ & S \sum_i N_0(\beta_r r_{i,j}) = S \sum_j N_0(\beta_r r_{i,j}). \end{aligned} \quad (29)$$

Für $a=l$ geht (28) in Gl. (26) für 8 Abschaltstäbe über.

C. Änderung des Exzesses $k-1$ durch Einfahren der Abschaltstäbe

Auf die Änderung des Exzesses $k-1$ durch Einfahren der Stäbe schließen wir wie folgt (Index 0 bezieht sich auf den Reaktor ohne Stäbe, Index 1 auf den Reaktor mit Stäben):

$$\begin{aligned} k_0 - 1 &= (L_{\text{eff}}^2 + \tau) \beta_0^2, \\ \beta_0^2 &= \beta_{0r}^2 + \beta_z^2, \\ \beta_{0r}^2 &= (2,405/R)^2. \end{aligned}$$

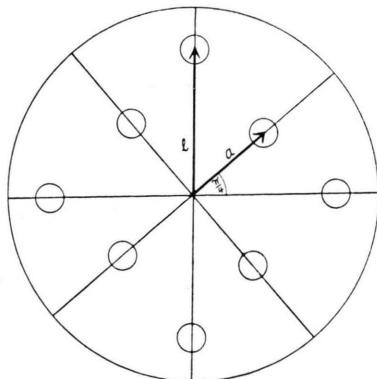


Abb. 6. Zwei Abschaltkränze mit je 4 Stäben im Abstand a bzw. l vom Zentrum.

Dabei ist L_{eff} die effektive Diffusionslänge und τ das FERMI-Alter, das das Verhalten der schnellen Neutronen in die Rechnung bringt. Sagen wir nun, daß die Änderung von β_r sich nur auf langsame Neutronen beziehen soll, dagegen der durch τ charakterisierte Anteil der schnellen Neutronen von den Abschaltstäben nichts merkt, also die alte Verteilung des schnellen Flusses vorliegen soll, so gilt

$$k_1 - 1 = L_{\text{eff}}^2 (\beta_r)_1^2 + (L_{\text{eff}}^2 + \tau) \beta_z^2 + \tau \beta_{0r}^2, \\ \text{d. h.}$$

$$k_1 - k_0 = L_{\text{eff}}^2 [(\beta_r)_1^2 - (\beta_r)_0^2]$$

oder anders geschrieben

$$\Delta k = L_{\text{eff}}^2 \Delta \beta_r^2. \quad (30)$$

Hierbei haben wir so gerechnet, als würde ein Absenken des thermischen Flusses den schnellen Fluß überhaupt nicht beeinflussen. Sicher erhalten wir somit eine *zu kleine Abschaltwirkung*. Genau genommen müßte man alle Fragestellungen dieser Arbeit mit der Zweigruppentheorie behandeln.

Nun geht es vor allem darum, Abschaltwirkungen zu vergleichen, wofür eine Behandlung mit der Eingruppentheorie ausreichen dürfte. Um den Anschluß an absolute Werte zu gewinnen, vergleichen wir Ein- und Zweigruppentheorie bei der Behandlung des Problems eines zentralen Stabes.

Gemäß GLASSTONE und EDLUND⁷ gilt

a) nach der korrigierten Eingruppentheorie

$$(\Delta k)_a = \frac{7,5 M^2}{R^2} \left[\left(0,116 + \ln \frac{R}{2,405 \varrho_0} \right) \left(1 + \frac{\tau}{L^2} \right) \right]^{-1}; \quad (31)$$

b) nach der Zweigruppentheorie

$$(\Delta k)_b = \frac{7,5 M^2}{R^2} \left[\left(0,116 + \ln \frac{R}{2,405 \varrho_0} \right) \left(1 + \frac{\tau}{L^2} \right) + \frac{\tau}{L^2} \ln \frac{L\sqrt{\tau} \cdot 2,405}{MR} \right]^{-1}. \quad (32)$$

Dabei ist

$$M^2 = L^2 + \tau.$$

Wenn

$$\left| \frac{\frac{\tau}{L^2} \ln \frac{L\sqrt{\tau} \cdot 2,405}{MR}}{\left(0,116 + \ln \frac{R}{2,405 \varrho_0} \right) \left(1 + \frac{\tau}{L^2} \right)} \right| \ll 1 \quad (33)$$

ist, stimmen die beiden Fälle a und b überein. Es gilt, daß der Unterschied zwischen a und b wächst, wenn R/L , τ/R und ϱ/R groß sind.

Wir werden also (30) mit einem Korrekturfaktor versehen, den wir durch das Verhältnis

$$\lambda_0 = \frac{(\Delta k)_b}{(\Delta k)_a}$$

approximieren können, wenn $\beta \varrho/2$ nicht groß gegenüber 1 ist.

Bei mehreren Stäben wird dieser Korrekturfaktor etwas kleiner sein als in (33), weil der lokale

schnelle Fluß außerhalb des Mittelpunktes des Reaktorkernes schwächer vom lokalen thermischen Fluß abhängt als im Mittelpunkt. Im Mittelpunkt speist er sich nur aus Spaltneutronen des Mittelpunktes, außerhalb des Mittelpunktes aus den Spaltneutronen des betrachteten Volumenelementes und dem Neutronenstrom, der vom Mittelpunkt her das betrachtete Volumenelement durchsetzt.

Wir erhalten also schließlich

$$\Delta k = L_{\text{eff}}^2 \Delta \beta_r^2 \lambda, \quad (34)$$

$$1 \leq \lambda \leq \frac{(\Delta k)_b}{(\Delta k)_a}. \quad (35)$$

D. Numerische Auswertung

Gl. (26) wurde für die Fälle $n = 4$, $n = 6$, $n = 8$ und $n = 12$ ausgewertet. Dabei wurde zunächst nicht mit dem effektiven Radius der Stäbe gerechnet, sondern es wurde die volle Gleichung benutzt. Die Funktion $d(\varrho)$ wurde für eine freie Weglänge $\lambda_{\text{tr}} = 2,4$ cm ermittelt, was einem D₂O-Reaktor entspricht. Schon bei $n=4$, erst recht bei $n=6$, $n=8$ und $n=12$ kann man die Reihe in Gl. (26) nach dem ersten Glied abbrechen, solange man a nicht zu nahe an R herankommen läßt. Dann nämlich wird das erste Glied gegenüber dem zweiten klein. Außerdem ϱ und n wurden die Werte a/R variiert, im allgemeinen durchläuft a/R die Werte 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7 und 0,8.

Substituieren wir $\beta_r R = x$, so ergeben sich schließlich aus (26) folgende Formeln:

$$N_0\left(x \frac{\varrho}{R}\right) + x \frac{d}{R} \left(N_1 x \frac{\varrho}{R}\right) - 4 J_0^2 \left(x \frac{a}{R}\right) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} + N_0\left(x \frac{2a}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{a\sqrt{2}}{R}\right) = 0, \quad n=4; \quad (37)$$

$$N_0\left(x \frac{\varrho}{R}\right) + x \frac{d}{R} N_1\left(x \frac{\varrho}{R}\right) - 6 J_0^2 \left(x \frac{a}{R}\right) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} + N_0\left(x \frac{2a}{R}\right) + 2 N_0\left(x \sqrt{3} \frac{a}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{a}{R}\right) = 0, \quad n=6; \quad (38)$$

$$\begin{aligned} N_0\left(x \frac{\varrho}{R}\right) + x \frac{d}{R} N_1\left(x \frac{\varrho}{R}\right) - 8 J_0^2 \left(x \frac{a}{R}\right) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} + N_0\left(x \frac{2a}{R}\right) \\ + 2 N_0\left(x \frac{a\sqrt{2}}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{2a \sin(\pi/8)}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{2a \cos(\pi/8)}{R}\right) = 0, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} n=8; \quad (39)$$

$$\begin{aligned} N_0\left(x \frac{\varrho}{R}\right) + x \frac{d}{R} N_1\left(x \frac{\varrho}{R}\right) - 12 J_0^2 \left(x \frac{a}{R}\right) \frac{N_0(x)}{J_0(x)} + N_0\left(x \frac{2a}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{2a \sin(\pi/12)}{R}\right) \\ + 2 N_0\left(x \frac{a}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{2a \cos(\pi/12)}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{a\sqrt{3}}{R}\right) + 2 N_0\left(x \frac{a\sqrt{2}}{R}\right) = 0, \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} n=12. \quad (40)$$

Über die Größe d , die eine Funktion von $\varrho/\lambda_{\text{tr}}$ ist, kommen in die Gln. (37) bis (40) absolute Maßstäbe herein.

Deswegen wurden die Gleichungen für den Fall $d=0$ gelöst, wobei aber ϱ dann den effektiven Radius ϱ_0 bedeutet.

⁷ s. Anm. ², Gl. (11, 21, 1).

Die Parameter ϱ_0/R hatten die folgenden Werte:

$$\varrho_0/R = \begin{cases} 0,01, \\ 0,0075, \\ 0,005. \end{cases}$$

Der Fall $\varrho_0/R = 0,01$ entspricht ziemlich genau dem Fall

$$\varrho = 3 \text{ cm}, \quad R = 142,5 \text{ cm}, \quad \lambda_{\text{tr}} = 2,4 \text{ cm (D}_2\text{O).}$$

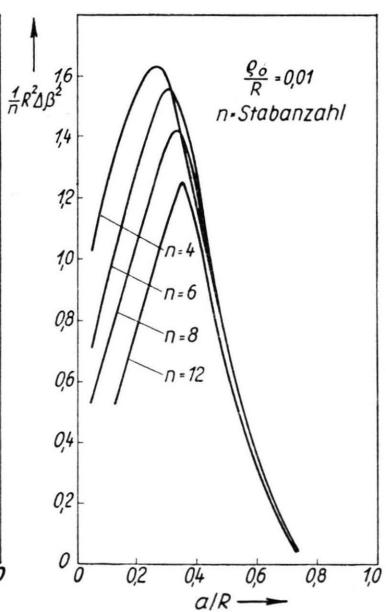
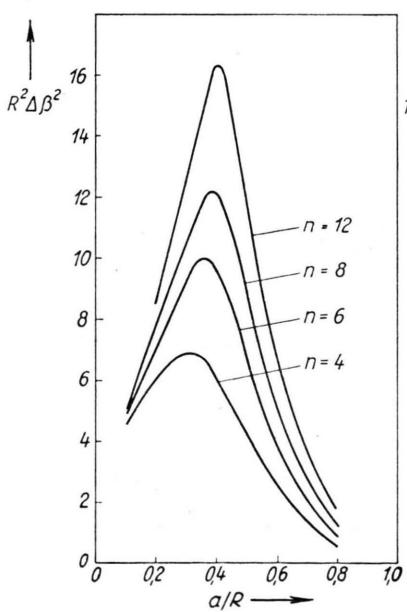
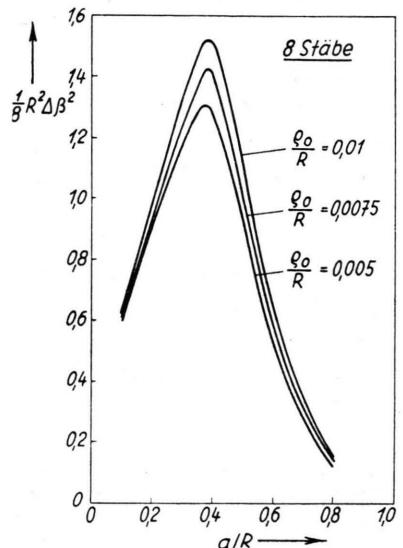
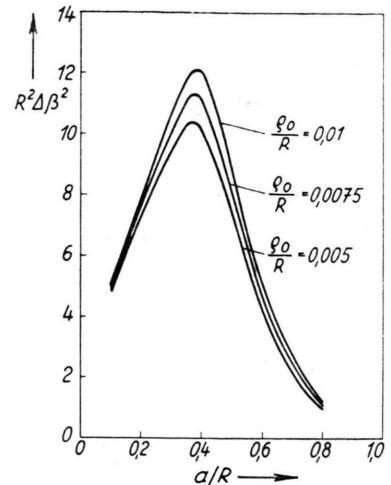
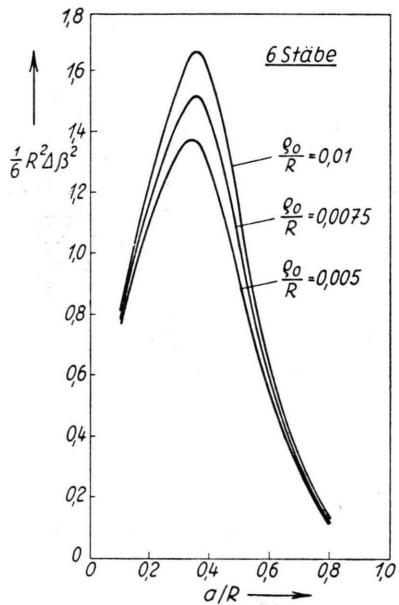
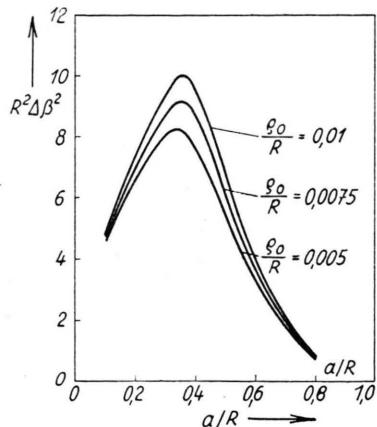
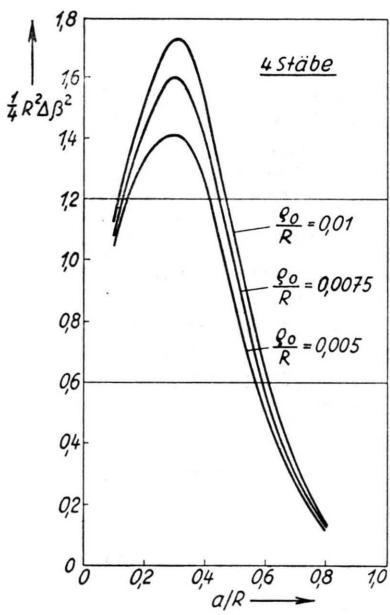
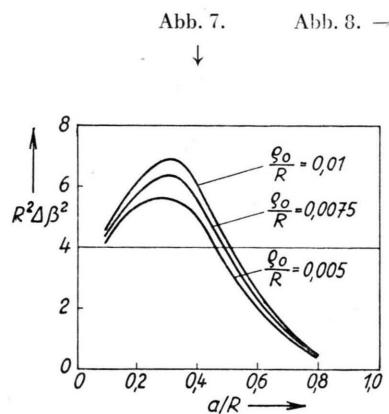


Abb. 11 bis 13. Abschaltwirkung und spezifische Abschaltwirkung in absoluten Einheiten mit der Stabzahl als Parameter.

Abb. 13.

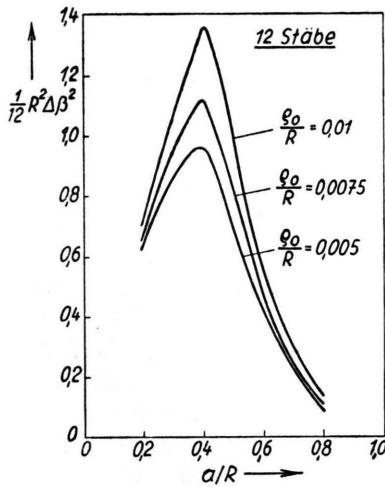
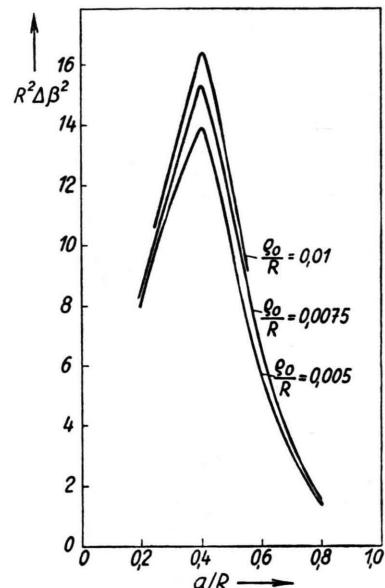


Abb. 10.

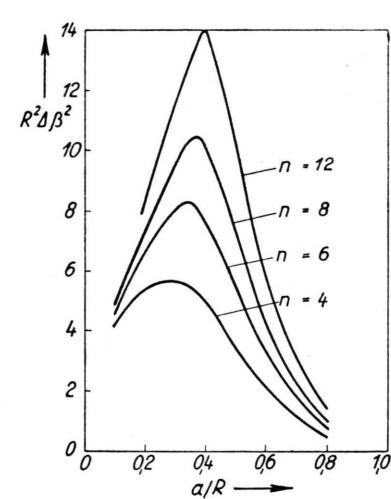


Abb. 11.

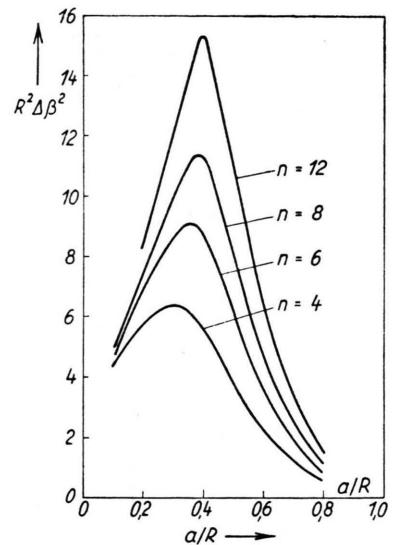


Abb. 12.

Die Kurve für $\rho_0/R = 0,01$ und 4 Abschaltstäbe stimmt sehr genau mit der im Reaktorhandbuch⁸ angegebenen Kurve überein. Weiter wurde Gl. (28) für 2×4 Stäbe numerisch ausgewertet.

Dafür galt

$$d = 0, \quad \rho_0/R = 0,01, \quad 0,2 \leq a/R \leq 0,8, \quad a/R \leq l/R.$$

Die schließlich benutzte Formel lautete unter Verwendung von (36) so, wie in (41), Seite 376, gezeigt wird. Die numerischen Auswertungen erfolgten mit Hilfe der Göttinger elektronischen Rechenmaschine G 1.

Die Zylinder-Funktionen wurden durch Reihenentwicklung im Nullpunkt mit einer Genauigkeit von $5 \cdot 10^{-5}$ berechnet und die Gleichungen wurden nach der regula falsi mit einer Genauigkeit von 1 bis $3 \cdot 10^{-2}$

⁸ s. Anm. ³, Bd. II, S. 608.

zu Null gemacht. In den Werten x bedeutete das eine Genauigkeit von $(1$ bis $2) \cdot 10^{-2}$.

Bei den Gl. (37) bis (40) geben wir die Resultate in Form von Diagrammen wieder. Einmal ist ρ_0 , das andere Mal die Stabanzahl n Parameter. Für den Fall der zwei Kränze von je 4 Abschaltstäben geben wir das Ergebnis in Tabellenform an. Um Kurven konstanter Abschaltwirkung in einer (a, l) Ebene (a Radius des ersten Kranzes, l Radius des zweiten Kranzes) zeichnen zu können, hätte man erheblich mehr Werte ermitteln müssen.

Aber gerade das Lösen der Gl. (41) war mit erheblichem Zeitaufwand verbunden, so daß die Gleichung hier nur für insgesamt 28 Wertepaare gelöst wurde. Für $a=l$ stimmen die Ergebnisse natürlich mit dem Fall eines Kranzes, der mit acht Stäben besetzt ist, überein. Wir erhalten Tab. 1 und die Abb. 7 bis 13.

	a/R	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
	l/R							
$x = R \beta_N$	0,2	3,70	—	—	—	—	—	—
	0,3	3,92	4,06	—	—	—	—	—
	0,4	4,13	4,24	4,22	—	—	—	—
	0,5	4,18	4,26	4,11	3,80	—	—	—
	0,6	4,03	4,12	3,91	3,57	3,29	—	—
	0,7	3,81	3,91	3,73	3,39	3,11	2,91	—
	0,8	3,62	3,73	3,58	3,27	2,99	2,78	2,65
$x^2 - 2,405^2$	0,2	7,89	—	—	—	—	—	—
	0,3	9,62	10,68	—	—	—	—	—
	0,4	11,24	12,18	12,07	—	—	—	—
	0,5	11,66	12,40	11,15	8,69	—	—	—
	0,6	10,49	11,21	9,52	6,97	5,07	—	—
	0,7	8,75	9,53	8,10	5,73	3,90	2,71	—
	0,8	7,31	8,12	7,02	4,90	3,14	1,95	1,24
$\frac{1}{8} (x^2 - 2,405^2)$	0,2	0,99	—	—	—	—	—	—
	0,3	1,20	1,34	—	—	—	—	—
	0,4	1,41	1,52	1,51	—	—	—	—
	0,5	1,46	1,55	1,39	1,09	—	—	—
	0,6	1,31	1,40	1,19	0,87	0,63	—	—
	0,7	1,09	1,19	1,01	0,72	0,49	0,34	—
	0,8	0,91	1,01	0,88	0,61	0,39	0,24	0,15

Tab. 1. Abschaltwirkung eines Aggregates von 2 Abschaltkränzen mit je 4 Stäben.

$$\begin{aligned}
& \left[N_0(x \cdot 0,01) - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0^2 \left(\frac{a}{R} x \right) + S_{j'} N_0 \right] \\
& \cdot \left[N_0(x \cdot 0,01) - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0^2 \left(x \frac{l}{R} \right) + S_{i'} N_0 \right] \\
& - \left[S_{j'} N_0 - 4 \frac{N_0(x)}{J_0(x)} J_0 \left(x \frac{a}{R} \right) J_0 \left(x \frac{l}{R} \right) \right]^2 = 0 ; \\
S_{j'} N_0 &= N_0 \left(x \frac{2a}{R} \right) + 2 N_0 \left(x \frac{a\sqrt{2}}{R} \right), \quad (41) \\
S_{i'} N_0 &= N_0 \left(x \frac{2l}{R} \right) + 2 N_0 \left(x \frac{l\sqrt{2}}{R} \right), \\
S_{j'} N_0 &= 2 N_0 \left(x \sqrt{\left(\frac{l}{R} \right)^2 + \left(\frac{a}{R} \right)^2 - \frac{a}{R} \frac{l}{R} \sqrt{2}} \right) \\
& + 2 N_0 \left(x \sqrt{\left(\frac{l}{R} \right)^2 + \left(\frac{a}{R} \right)^2 + \frac{a}{R} \frac{l}{R} \sqrt{2}} \right).
\end{aligned}$$

E. Diskussion

Bei der Diskussion der Ergebnisse, wie sie in den Diagrammen vorliegen, bemerkt man zunächst, wie das Maximum der Kurven mit wachsender Stabzahl und wachsendem Stabradius zu größeren Werten a/R auswandert. Allerdings ist dieses Auswandern nur schwach. Bei kleinen Werten von a/R ist die gegenseitige Kopplung der Stäbe noch stark; je mehr

sie zusammenrücken, desto mehr wirken sie wie ein Stab von großem Radius. Bei großen Werten von a/R nimmt die Wirksamkeit stark ab, denn für $a/R = 1$ ist sie natürlich Null. So bildet sich das Maximum bei mittleren Werten von a/R aus. Je größer die Stabanzahl und je größer der Radius ist, desto später setzt die Entkopplung ein, bei um so größeren Werten von a/R liegt also das Maximum. Für Werte von a/R , die größer als der Wert sind, bei dem das Maximum in Erscheinung tritt, ist die Entkopplung dann so vollständig, so daß die spezifische Wirksamkeit unabhängig von der Stabanzahl wird: Die Wirkungen addieren sich einfach.

Vergleicht man das Anwachsen der Wirksamkeit bei Erhöhen des Stabradius, so erkennt man, daß man schnell in eine Sättigung hineinläuft. Auch hier laufen wir, wenn auch langsamer, in eine Sättigung hinein. Die angegebenen Zahlen sind Beispiele und sind für verschiedene Parameterkonstellationen verschieden. Man muß in jedem einzelnen Fall die Diagramme lesen.

Nun erhebt sich die Frage, ob man nichts gewinnen kann, wenn man den einen Kranz von z. B. acht Stäben in zwei Kränze aufteilt, also letzten Endes die Stäbe gleichmäßig über den Reaktor verteilt.

Man erkennt an der Tabelle, daß für $a/R = 0,3$ und $l/R = 0,5$ sich eine noch höhere Abschaltwirkung ergibt. Aus dem für wachsende Stabanzahl immer steiler werdenden Maximum der Diagramme für einen Kranz hätte man vielleicht schließen können, daß ein Abweichen vom optimalen Abstand die Wirksamkeit stark beeinträchtigt. Man erkennt, daß dem nicht so ist, sondern sich im Gegenteil noch eine leichte Steigerung ergibt.

Nach Fertigstellung dieser Arbeit kam dem Verfasser eine Arbeit von MURRAY⁹ in die Hand, die

⁹ RAYMOND L. MURRAY, North Carolina State College, Raleigh, North Carolina. Published on behalf of the "Nuclear Engineering and Science of Chemical Engineers", 25 West 45 Street, New York 36.

dieselbe Fragestellung mit denselben Methoden nach der Zweigruppentheorie behandelt.

Indessen dürfte wegen der erheblich umfangreicheren, numerischen Ergebnisse die vorliegende Arbeit doch noch von Interesse sein.

Ein zahlenmäßiger Vergleich ist nicht möglich, da die Wirksamkeit unmittelbar als Reaktivitätsverlust angegeben ist und nicht in Einheiten, die dem Reaktortyp gegenüber invariant sind.

Ich danke Herrn Prof. Dr. L. BIERMANN für die Möglichkeit, die elektronische Rechenmaschine G 1 des Max-Planck-Institutes für Physik zu benutzen. Die Durchführung der Rechnungen wurde durch dieses Hilfsmittel erst ermöglicht.

Über die Abbildungsfehler von beliebig begrenzten homogenen magnetischen Sektorenfeldern

Von L. A. KÖNIG und H. HINTENBERGER

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz
(Z. Naturforsch. 12 a, 377—385 [1957]; eingegangen am 11. Februar 1957)

Es werden die Bildfehler magnetischer Sektorfelder für beliebigen Ein- und Austrittswinkel und beliebige Krümmung der Feldbegrenzung in Ein- und Austrittspunkt des Hauptstrahles angegeben. Die Ausdehnung des Gegenstandes (Schlitzbreite) wird berücksichtigt, der Einfluß des Streufeldes vernachlässigt. Die gewonnenen Ergebnisse werden mit den bereits früher bekannten Spezialfällen verglichen. Sie gestatten die unmittelbare Berechnung der Bildfehler von Massenspektrometern und Masenspektrographen, die aus hintereinander geschaltetem elektrischem Feld und homogenem magnetischem Sektorfeld mit gekrümmter Feldbegrenzung bestehen.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit¹, in der auch ausführlichere Literaturhinweise zu finden sind, wurde für gerade Polschuhbegrenzung der Ausdruck für den aus dem Magnetfeld austretenden Nebenstrahl s_1 bezogen auf ein Koordinatensystem, dessen x_m -Achse mit dem aus dem Feld ausgetretenen Hauptstrahl s_0 zusammenfällt, angegeben (siehe Abb. 1). Bedeutet α_m^* den Öffnungswinkel des vom Objekt P'' ausgehenden Strahlenbündels — das Objekt ist zunächst als ein zur Zeichenebene senkrechter Schlitz vernachlässigbar kleiner Weite gedacht — und β die relative Impulsabweichung der Teilchen des Nebenstrahls s_1 gegen die des Hauptstrahls, so lautet die Gleichung des austretenden Nebenstrahles:

$$y_m = r_m (M_1^* \alpha_m^* + M_2^* \beta + M_{11}^* \alpha_m^{*2} + M_{12}^* \alpha_m^* \beta + M_{22}^* \beta^2) + x_m (N_1^* \alpha_m^* + N_2^* \beta + N_{11}^* \alpha_m^{*2} + N_{12}^* \alpha_m^* \beta + N_{22}^* \beta^2). \quad (1)$$

¹ H. HINTENBERGER u. L. A. KÖNIG, Z. Naturforsch. 11 a, 1039 [1956].

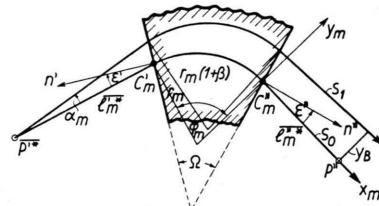


Abb. 1. Strahlengang im Fall geradlinig begrenzter Polschule s_0 = Hauptbahn, die von Teilchen des Impulses $p=p_0$ mit $\alpha_m^*=0$ durchlaufen wird. s_1 = Nachbarbahn von Teilchen mit $p=p_0(1+\beta)$ und $\alpha_m^*\neq 0$. x_m, y_m Koordinatensystem, auf das der aus dem Feld ausgetretene Nebenstrahl bezogen wird. Eintrittswinkel ϵ' und Austrittswinkel ϵ'' sind wie üblich dann positiv gezählt, wenn die Normalen zu den Feldgrenzen in C_m' und C_m'' auf der dem Ablenkungszentrum abgewandten Seite des Hauptstrahls liegen. In der Abbildung muß es α_m^* statt α_m heißen.

Hierin sind die Koeffizienten M^*, N^* Funktionen des Krümmungsradius r_m der Hauptbahn im Magnetfeld, der Objektentfernung \bar{l}_m^* von C_m' , des Winkels φ_m , um den der Hauptstrahl im Feld abgelenkt wird, sowie von Ein- und Austrittswinkel ϵ' und ϵ''